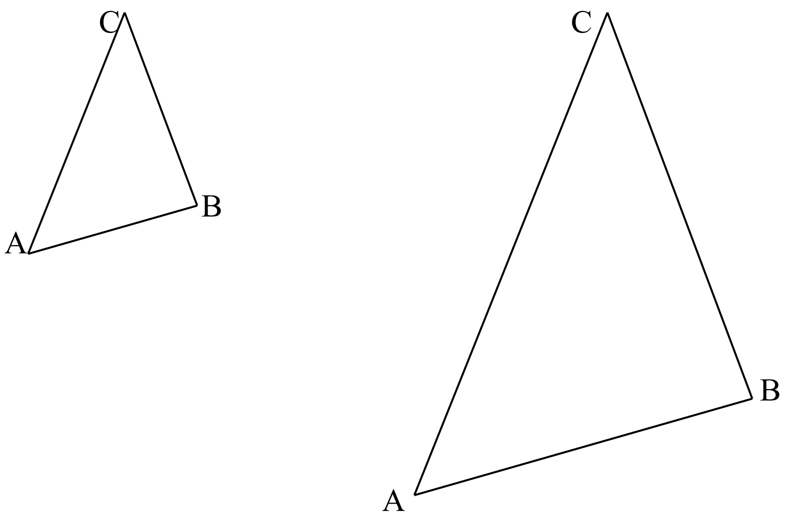
Zur zentrischen Streckung

Vorab eine Bemerkung zur Bestimmung der Inhalte von Flächen und der Rauminhalte von Körpern. Man kann sich diese Bestimmungen wie folgt vorstellen.

Eine Fläche legt man mit gleichgroßen Quadraten aus und zählt diese ab. Ist die Fläche krummlinig begrenzt, so kann man sich die Quadrate immer kleiner denken. Freilich wird man immer einen Fehler machen: Die von Quadraten überdeckte Fläche wird entweder zu groß oder zu klein sein. Gibt man sich aber eine Abweichung des so bestimmten Flächeninhaltes vom tatsächlichen vor, so kann man die Quadratlänge so klein wählen, dass der Fehler, den man beim „Auslegen“ macht, unter dieser Abweichung liegt. Mit anderen Worten: Wählt man die Quadrate nur klein genug, so lässt sich der Fehler beim Auslegen der Fläche beliebig klein machen. Er lässt sich unter jede vorgegebene Grenze drücken.

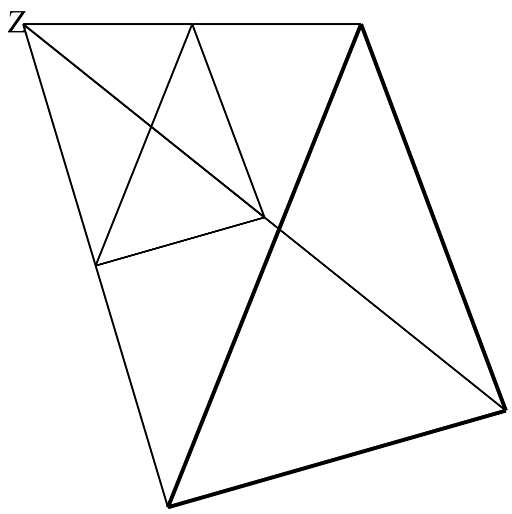
Ebenso verhält es sich bei der Bestimmung von Volumnia: Man kann den Raum sich ausgefüllt denken von lauter gleichgroßen Würfeln. Den Fehler, den man beim Ausfüllen macht, kann man unter jede vorgegebene Grenze drücken, wenn man die Kantenlänge der Würfel nur klein genug wählt.

Dieser Vorspann gibt die Begründung dafür, dass wir uns im folgenden auf die am einfachsten zu berechnende Fläche, das Quadrat, und den am einfachsten zu berechnenden Körper, den Würfel, beschränken können.
Wir betrachten die beiden folgenden Figuren



Die beiden Figuren A,B,C gehen auseinander hervor, wenn man alle Strecken um den gleichen Faktor (hier ist dieser gleich 2) streckt und alle Winkel beibehält. Die Verhältnisse entsprechender Streckenlängen (die „Proportionen“) bleiben gleich. Die beiden Figuren nennt man „ähnlich“. Man kann sich vorstellen, dass sie geometrisch so auseinander hervorgehen, dass man irgendeinen Punkt Z als „Zentrum“ wählt, alle Punkte der Figur mit diesem Zentrum verbindet, und alle Strecken von Z zu den Punkten verdoppelt.

Man nennt dies eine „zentrische Streckung“.



Ein gut bekannter Fall einer zentrischen Streckung ist der Wechsel des Maßstabes bei einer Landkarte. Stellen A, B, C etwa drei Städte auf einer Landkarte dar, so bleiben bei der Änderung des Maßstabes alle Winkel und die Verhältnisse (Proportionen) entsprechender Entfernungen unverändert.

Eine „Stauchung“ ist auch eine Streckung (die kleinere Figur geht dann aus der größeren hervor) , und zwar eine Streckung mit einem Streckfaktor kleiner als 1.

Wie ändern sich die Flächeninhalte bei einer zentrischen Streckung um den Faktor k ?

Die Kante a eines Quadrates ändert sich in k•a, der Flächeninhalt a^2 in $(k \bullet a)^2 = k^2 \bullet a^2$.
Der Flächeninhalt ändert sich also nicht um den Faktor k, sondern um den Faktor k^2. Und da man sich jede Fläche beliebig genau(s.o.) durch Quadrate ausgelegt denken kann, lässt sich festhalten:

Bei einer zentrischen Streckung mit dem Streckfaktor k ändern sich die Inhalte von Flächen um den Faktor k^2.

Die Kante a eines Würfels ändert sich in k•a, der Rauminhalt a^3 in $(k \bullet a)^3 = k^3 \bullet a^3$. Der Rauminhalt ändert sich also um den Faktor k^3. Und da man sich jedes Volumen beliebig genau durch Würfel ausgefüllt denken kann, lässt sich festhalten:

Bei einer zentrischen Streckung mit dem Streckfaktor k ändern sich die Rauminhalte von Körpern um den Faktor k^3.

Wir wollen ein paar Anwendungen dieser Regeln betrachten. Die erste stammt von Galilei; er hat sie in seinen „Discorsi“ angestellt.

Angenommen, aus einem kleinen Hund entstünde ein Riesenhund, indem man alle Abmessungen des kleinen Hundes um den Faktor 10 vergrößerte. Es würde also bis ins kleinste Detail ein zehnfach vergrößerter Hund entstehen. Wäre dies möglich? Oder, in der Fachsprache ausgedrückt: Sind die Naturgesetze symmetrisch bezüglich einer zentrischen Streckung?

Galilei antwortet mit nein, und das aus dem folgenden Grund. Die Knochenquerschnitte des Hundes würden sich um den Faktor 10^2 vergrößern. Da die Tragfähigkeit eines Balkens – und wohl auch die eines Knochens – proportional zu seinem Querschnitt ist, würde sich die Tragfähigkeit der Knochen des Hundes um den Faktor 100 vergrößern.
Sein Volumen allerdings würde um den Faktor 10^3, also tausendfach größer werden. Und mit seinem Volumen auch sein Gewicht: Ein tausendfach vergrößertes Gewicht müsste von einem Knochengerüst getragen werden, das nur hundertfach tragfähiger geworden wäre: Das kann nicht gut gehen.
Und deshalb ist klar, dass größere Tiere auch Knochen mit relativ größerem Querschnitt haben müssen. Ein Elefant hat ein auch **relativ** größeres Knochengerüst als eine Maus.

Bleiben wir beim Vergleich von kleinen und großen Tieren. Ein kleines Tier – Hamster, Maus – möge in seinen Abmessungen hundertmal kleiner sein als ein großes, z.B. ein Elefant.
Die Oberfläche des großen Tieres ist $100^2 = 10\,000$ mal größer als die des kleinen; das Volumen des großen Tieres ist aber $100^3 = 1\,000\,000$ mal größer als die des kleinen Tieres. Das Verhältnis Oberfläche/Volumen hat beim großen Tier nur 1/100 des Wertes wie beim kleinen Tier: Das kleine Tier hat im Vergleich zum großen eine viel größere Oberfläche in Bezug auf sein Volumen und damit auf seine Masse. Damit verlieren kleinere Tiere relativ viel Wärme; sie müssen pro kg ihrer Masse mehr Wärme produzieren als große Tiere: Ihr Grundumsatz ist höher.

Allgemein ändert sich bei einer zentrischen Streckung mit dem Streckfaktor k der Quotient aus Oberfläche und Volumen um den Faktor 1/k.

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein fester oder flüssiger Stoff mit einem ihn umgebenden Gas chemisch reagiert, ist um so größer, je größer der Quotient aus Oberfläche und Volumen ist. Dieses Verhältnis wird aber um so größer, je feiner der Stoff verteilt ist. Das ist der Grund, warum es leicht zu Staubexplosionen kommt. Ein Treibstoff- Luft – Gemisch wird dann explosiv, wenn der Treibstoff in Form von kleinen Tröpfchen vorliegt.

Zum Abschluss die folgende Aufgabe. Eine senkrechte quadratische Pyramide habe die Höhe H = 50 cm. Sie soll parallel zur Grundfläche so durchschnitten werden, dass die beiden entstehenden Körper – eine kleinere Pyramide mit der Pyramidenspitze und ein Pyramidenstumpf – je die Hälfte des Volumens der Pyramide haben, aus der sie entstanden sind. In welcher Höhe über der Grundfläche muss der Schnitt geführt werden?

Lösung: Wir bestimmen die Höhe h der kleinen beim Schnitt entstehenden Pyramide. Die kleine Pyramide und die große, aus der sie entstanden ist, gehen durch zentrische Streckung auseinander hervor (man kann sich z.B. bequem die Pyramidenspitze als Streckzentrum vorstellen). Der Streckfaktor k ist gegeben durch k = h/H. Die Volumina verhalten sich wie k^3. Da das Volumen der kleinen Pyramide genau die Hälfte des Volumens V der großen sein soll, gilt: $(V/2)/V = (h/H)^3$ oder $½ = (h/H)^3$ oder $h = H\bullet(1/2)^{1/3}$. Mit H = 50 cm ergibt das etwa h = 39,7 cm. Der Schnitt muss also in er Höhe H – h = 10,3 cm über der Grundfläche geführt werden.