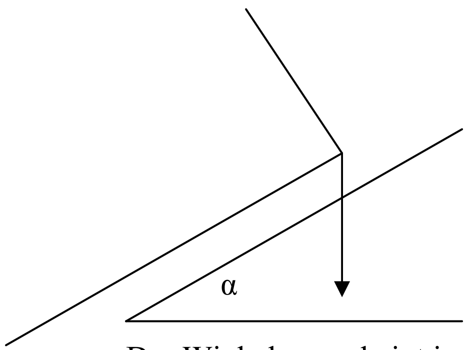
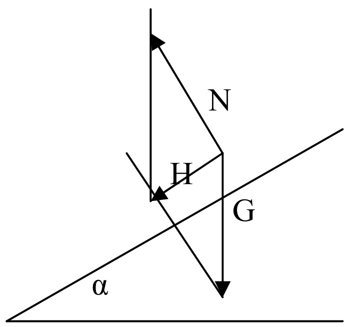
Eine Plauderei zur schiefen Ebene

Hinweis: Die Plauderei wird ab Seite 4 etwas anstrengend; bis dahin halten sich die Spitzfindigkeiten in Grenzen

Welche Kräfte erfährt ein Körper, der sich auf einer schiefen Ebene befindet, wenn von Reibungskräften abgesehen wird ?

Das sind zwei Kräfte. Erstens sein Gewicht G und zweitens die Kraft N, welche die Unterlage auf ihn ausübt. Die Kraft N ist die „Zwangskraft", welche den Körper auf der Ebene hält; sie ist senkrecht zur Ebene gerichtet. Die beiden Kräfte addieren sich zu einer Resultierenden H, welche hangabwärts gerichtet ist und die deshalb als „Hangabtriebskraft" bezeichnet wird. Wir kennen von G Betrag und Richtung, von N und H vorerst nur die jeweilige Richtung. Aber aus der Tatsache, dass H die Resultierende von G und N ist, können wir durch Anwendung der Regeln der Addition von Vektoren die Beträge von N und von H bestimmen.





Der Winkel α erscheint in dem Kräfteparallelogramm an der Spitze von G (Winkel, deren Schenkel senkrecht aufeinander stehen, sind gleich groß), und so erhält man die Beziehungen **N=G•cosα** und **H=G•sinα .** Bezeichnet m die Masse des Körpers, so gilt **N=mg•cosα** und **H=mg•sinα** .

Fassen wir zusammen. Auf den Körper wirken zwei Kräfte ein: Die Gewichtskraft G und die Kraft N, die von der Ebene auf ihn ausgeübt wird. Als Resultierende ergibt sich H; der Körper gleitet hangabwärts mit der Beschleunigung g•sinα .
Es mag befremdlich klingen, wenn davon die Rede ist, die Ebene übe auf den Körper eine Kraft aus. Allenfalls ist man geneigt einzuräumen, dass da eine Kraft N als Reaktionskraft zu einer Gewichtskomponente zwischen Ebene und Körper existiert. Aber eine Reaktionskraft ist nichts „Sekundäres"; Kraft und Gegenkraft wirken nach dem 3. Newtonschen Axiom immer zugleich. Will man herausfinden, welche Kräfte auf einen Körper einwirken, so muss man die Welt von seinem Standpunkt aus sehen. Ein Sensor, der am Körper befestigt wäre und der melden würde, welche Kräfte auf ihn einwirken, würde angeben, dass von der Ebene her und senkrecht zu ihr die Kraft N auf ihn drücken würde.
Die hangabwärts gerichtete Beschleunigung g•sinα ist die Resultierende aus zwei Beschleunigungen. Der Körper führt simultan zwei beschleunigte Bewegungen aus, deren Resultat die von ihm ausgeführte hangabwärts gerichtete Gleitbewegung ist. **Erstens fällt er frei, und zweitens führt er eine Bewegung mit der Beschleunigung g•cosα senkrecht von der Ebene weg aus. (Und deshalb würde der im vorigen Absatz beschriebene Kraftmesser nur N angeben: Ein frei fallender Körper ist kräftefrei) .**
Zwei Körper, deren erster eine schiefe Ebene reibungsfrei hangabwärts gleitet und deren zweiter frei fällt und die zugleich starten, haben zum Zeitpunkt t nach Beginn der Bewegung

voneinander die Entfernung ½ g cosα • t^2 (Das ist die Lösung einer Aufgabe aus der Abiturprüfung des Jahres 1885 (s. Aufgabensammlung auf dieser Seite der homepage!))

Wir beschäftigen uns nun mit einem Gedankenexperiment, das danach zur Lösung des Problems der Kurvenüberhöhung herangezogen werden wird.

Ein Block der Masse m liegt auf einer schiefen Ebene, deren Neigungswinkel mit α bezeichnet wird. Es existiert keine Reibung zwischen dem Block und der Ebene. Die Ebene wird mit der Beschleunigung $\mathbf{a_z}$ in horizontaler Richtung gezogen (o.B.d.A. nach rechts).
Wie bewegt sich der Körper?
Wir beziehen uns auf die unten angegebenen Skizzen, zunächst auf deren rechten, allgemeinen Teil und führen für die Beträge der Beschleunigungen die folgenden Buchstaben ein. **a** ist die Beschleunigung des Körpers; $\mathbf{a_n}$ die Komponente der Beschleunigung senkrecht zur schiefen Ebene, $\mathbf{a_x}$ **,** $\mathbf{a_y}$die Komponenten in waagerechter bzw. senkrechter Richtung (nach unten), $\mathbf{a_z}$ die Beschleunigung, mit der die Ebene nach rechts bewegt wird (der Index z hat nichts mit einer dritten Dimension zu tun; er wird später die Bedeutung von „zentral“ haben).

Bevor wir in die Rechnung einsteigen, sei kurz an den gewöhnlichen Fall einer ruhenden schiefen Ebene erinnert: Dort ist $\mathbf{a = g\sin\alpha}$, $\mathbf{a_y = g(\sin\alpha)^2}$, $\mathbf{a_x = g\sin\alpha\cos\alpha}$, $\mathbf{a_n = g\cos\alpha}$.

Wenn keine Reibung vorliegt, wirkt keine Kraft parallel zur Ebene zwischen Block und Ebene. Wenn er von ihr eine Kraft **N** erfährt ,so ist diese senkrecht zur Ebene gerichtet. Außer einer solchen „Normalkraft“ **N** wirkt nur noch das Gewicht **G** auf den Block.
Das führt zu folgendem Ansatz im Fall, dass die Ebene nach rechts mit $\mathbf{a_z}$ beschleunigt wird.

Der Körper „spürt“ die Beschleunigung der Ebene nur in einer Veränderung der Kraft, welche die Ebene auf ihn ausübt, und das heißt in einer Veränderung der Komponente $\mathbf{a_n}$**.**
Ansatz: $\mathbf{a_n = g\cos\alpha + a_z\sin\alpha}$
Der zweite Teil ist die Komponente von $\mathbf{a_z}$ senkrecht zur Ebene.
Die weiteren Folgen ergeben sich direkt aus der Geometrie (Abbildung rechts; der Winkel an der oberen Spitze ist α)

$\mathbf{\underline{a_x} = a_n\sin\alpha = \underline{gcso\alpha + a_z\sin^2\alpha;}}$ $\mathbf{\underline{a^2} = a_n^2 + g^2 - 2a_n g\cos\alpha = \underline{\sin^2\alpha\ (g^2 + a_z^2)}}$

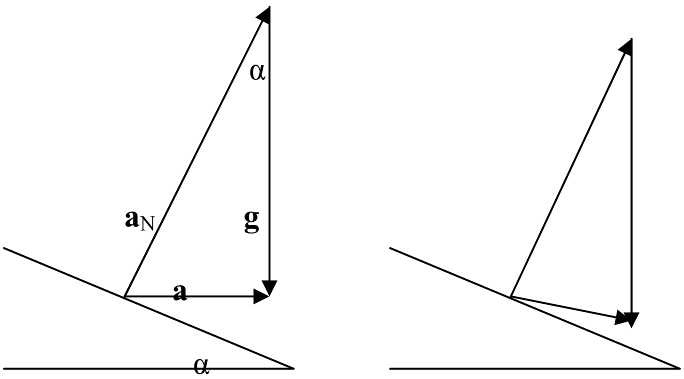
$\mathbf{\underline{a_y} = g - a_n\cos\alpha = \underline{g\sin^2\alpha - a_z\sin\alpha\cos\alpha}}$

Die elementaren trigonometrischen Umformungen sind hier weggelassen; die Resultate ergeben sich jeweils, wenn der Ansatz für $\mathbf{a_n}$ verwendet wird.

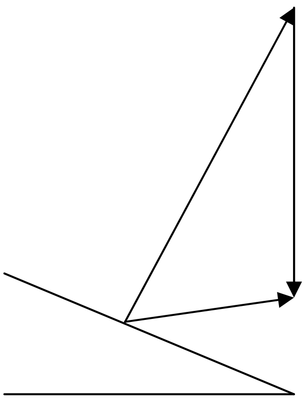
Man überzeuge sich zunächst, dass die Gleichungen für $\mathbf{a_z = 0}$ in den oben angegebenen Fall einer ruhenden schiefen Ebene übergehen.

Solange $\mathbf{a_y > 0}$, rutscht der Block abwärts, wenn auch, wie es sein muss, langsamer als im Fall einer nicht bewegten Ebene.
Betrachten wir den Fall $\mathbf{a_y = 0}$. Dann bewegt sich der Körper auf er Ebene überhaupt nicht; er behält auf ihr seine Lage bei und wird mit ihr nach rechts beschleunigt.
Aus $\mathbf{a_y = 0}$ folgt $\mathbf{a_z = g\tan\alpha}$, und daraus wiederum $\mathbf{a_x = a = a_z = g\tan\alpha}$.
Im Fall $\mathbf{a_z > g\tan\alpha}$ ist $\mathbf{a_y < 0}$ **:** Dann wird die Ebene so rasch beschleunigt, dass der Körper nach oben wegrutscht.

Der im weiteren Verlauf interessierende Fall $\mathbf{a_y = 0}$ und folglich $\mathbf{a_x = a = a_z = g\tan\alpha}$ ist in der Skizze eigens links dargestellt.



a mit Vertikalkomponente
$\mathbf{a}_z < g \cdot \tan\alpha$;
Der Block behält seine Lage auf der Ebene nicht bei, sondern rutscht abwärts.



$a_z > g \cdot \tan(\alpha)$; der Block bewegt sich mit der Ebene

nach rechts, rutscht zugleich aber die Ebene hinauf

Übertragen wir das Modell auf die Kurvenfahrt. Die Kurve habe den Krümmungsradius R, ein Fahrzeug fahre mit der Bahngeschwindigkeit v_B in die Kurve hinein. Es handele sich um eine Rechtskurve. Die Reibung zwischen Fahrzeug und Unterlage werde vernachlässigt.

Für das Fahrzeug stellt sich die Lage so dar wie im Modell für den Block: Die Ebene, auf der es sich befindet (die mit α überhöhte Kurve) , bewegt sich aus seiner Sicht mit der Zentripetalbeschleunigung v_B^2/R nach rechts. Das Fahrzeug wird von der Kurve nach rechts mitgenommen, wobei es die Beschleunigung seiner Ebene $\mathbf{a_z}$ über v_B beeinflussen kann.
Es gibt nur eine stabile Situation: $v_B^2/R = \tan(\alpha)$. Richtet es seine Geschwindigkeit nach dieser Gleichung ein, so erfährt es keine Beschleunigung parallel zur Fahrbahn; es liegt perfekt in der Spur.

Fährt es schneller, so wird $\mathbf{a_z} > g\tan\alpha$: Das Fahrzeug rutscht nach oben weg, es wird aus der Kurve getragen. Ist $\mathbf{a_z} <$ $g\tan\alpha$, so rutscht es nach unten.

Wir kommen zum anstrengenden Teil der Plauderei.

Zum Thema „schiefe Ebene“ gehört ein amüsantes Erlebnis, das ich vor gut zwanzig Jahren hatte. In der Zeitschrift „Physik in unserer Zeit“ hatte ein Physiker der Universität Bern über Experimente berichtet, die er mit beschleunigten, teilweise gefüllten Gläsern vorgenommen hatte. Es sollte herausgefunden werden, wie sich die Flüssigkeitsspiegel in den Gläsern einstellen würden. Von Oberflächenspannungen sollte abgesehen werden; tatsächlich spielten diese kaum eine Rolle bei den untersuchten Fragen. (K.Lenggenhager: Flüssigkeitsspiegel im rotierenden, abgleitenden und seitlich schwingenden Glas. In: Physik in unserer Zeit, 20, 1989, 1). Unter anderem wurde untersucht, wie sich die Flüssigkeitsspiegel einstellen, wenn das Glas in waagerechter Richtung gleichmäßig beschleunigt wird, wenn es reibungsfrei eine schiefe Ebene hinabgleitet und wenn es eine schiefe Ebene hinabgleitet, die Gleitreibung zeigt.

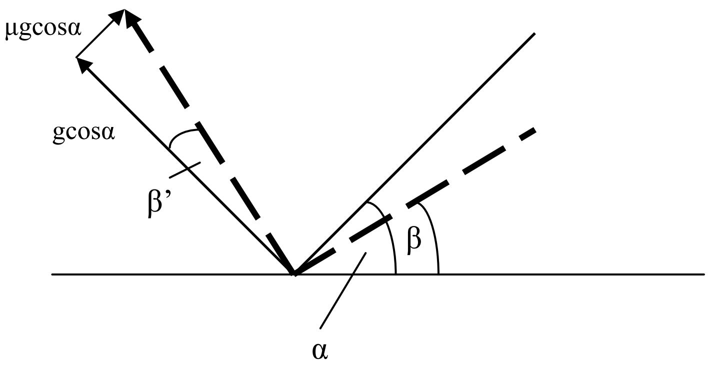
Die Experimente waren überzeugend, aber der Kollege berichtete, dass an der Universität Bern kein Physiker aufzufinden war, der gleich eine schlüssige Erklärung für die Phänomene parat hatte. Auch ein Nachforschen in der dortigen Universitätsbibliothek war erfolglos geblieben. Da fiel mir eine Übungsaufgabe ein, die wir in den sechziger Jahren an der Universität hier in Saarbrücken gerechnet hatten und welche die Lösungen der genannten Probleme bot. In einem Leserbeitrag habe ich diese Lösungen damals vorgestellt (Physik in unserer Zeit, Märzheft 1989). Die von mir referierten Lösungen waren korrekt, aber umständlich; hier und heute soll es etwas schneller gehen.

Fangen wir mit dem Glas an, das reibungsfrei eine schiefe Ebene hinabgleitet. Die Flüssigkeitsoberfläche stellt sich immer so ein, dass keine Kraft parallel zur Oberfläche wirkt; die resultierende Kraft steht senkrecht auf der Oberfläche. Im genannten Fall führen Glas und Flüssigkeit zugleich zwei Bewegungen aus. Erstens einen freien Fall. In einem freien Fall sind die Körper schwerelos; die Oberfläche wird nur durch die Oberflächenspannung geformt; diese wirkt radial nach innen, so dass die Körper eine Art schwabbeliger Kugelform annehmen. Aber von Oberflächenspannungen soll hier abgesehen werden .Der freie Fall hat also überhaupt keinen Einfluss auf die Oberfläche. Zweitens eine Bewegung senkrecht von der Ebene weg mit der beschleunigenden Kraft N. Und so bildet sich die Oberfläche in diesem Fall genau parallel zur schiefen Ebene aus.

Betrachten wir den Fall, dass auf der schiefen Ebene zwischen Körper und Ebene eine Gleitreibungskraft vorliegt. Diese ist gleich $\mu \bullet N = \mu \bullet G \bullet \cos\alpha$, wobei mit μ die Gleitreibungszahl bezeichnet ist.

Unter der Einwirkung von drei Kräften – Gewicht, Normalkraft N, Reibungskraft – führt die Flüssigkeit nun drei beschleunigte Bewegungen simultan aus. Das sind der freie Fall (kein Einfluss auf die Gestalt der Oberfläche), eine Bewegung senkrecht weg von der Ebene mit der Beschleunigung $g\cos\alpha$ und zusätzlich eine Bremsbeschleunigung die Ebene aufwärts mit $\mu g\sin\alpha$. Die letzen beiden werden addiert, und der Flüssigkeitsspiegel stellt sich so ein, dass der resultierende Vektor auf ihm senkrecht steht. Abbildung 1 enthält das Resultat.

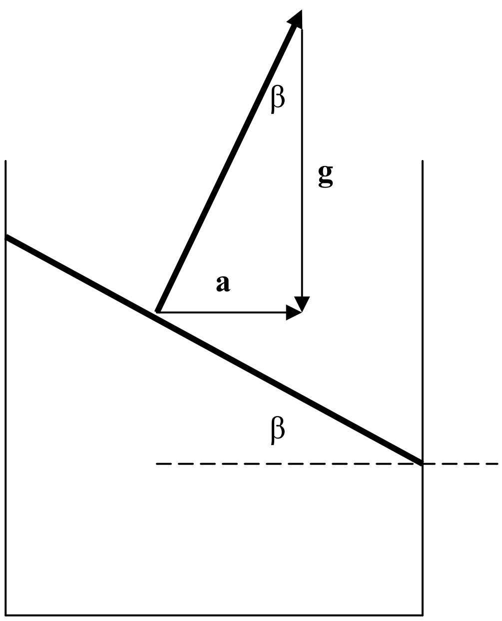
Abbildung 1: Flüssigkeitsspiegel auf schiefer Ebene mit Reibung



α: Neigungswinkel der schiefen Ebene β: Neigungswinkel des Flüssigkeitsspiegels
$\alpha + 90° = \beta' + 90° + \beta \rightarrow \alpha = \beta' + \beta \rightarrow$ <u>α >β : Der Flüssigkeitsspiegel ist weniger stark geneigt als die schiefe Ebene.</u>
Im einzelnen folgt:

$$\tan(\beta') = \mu \rightarrow \mathbf{tan(\alpha)} = \tan(\beta' + \beta) = \frac{\tan(\beta') + \tan(\beta)}{1 - \tan(\beta')\tan(\beta)} = \frac{\boldsymbol{\mu + \tan(\beta)}}{\boldsymbol{1 - \mu\tan(\beta)}}$$

$$\text{oder : } \mathbf{tan(\beta)} = \frac{\boldsymbol{\tan(\alpha) - \mu}}{\boldsymbol{1 + \mu\tan(\alpha)}}$$



tan(β) = a/g

Abbildung 2 : Beschleunigung in waagerechter Richtung

Es lohnt sich, die Formel für tan(β) ein wenig näher zu betrachten. Für den reibungsfreien Fall ($\mu=0$) erhält man wie erwartet , dass der Flüssigkeitsspiegel parallel zur Ebene verläuft ($\alpha=\beta$). Der andere Extremfall ($\beta= 0$, d.h. Flüssigkeitsspiegel stellt sich waagerecht ein) ergibt sich dann, wenn gilt: $\tan(\alpha) = \mu$. In diesem Fall herrscht Gleichgewicht zwischen dem Hangabtrieb und der Reibung ($mg\sin(\alpha) = \mu mg\cos(\alpha)$); das Glas bleibt stehen; der Spiegel stellt sich waagerecht ein.

Schauen wir uns den Fall eines Glases an, das in waagerechter Richtung mit der Beschleunigung a bewegt wird.. Das Experiment zeigt, dass sich der Flüssigkeitsspiegel zur Beschleunigung hin abfallend einstellt; es genügt daher, ein Teilchen der Flüssigkeit zu betrachten, das auf der sich einstellenden Oberfläche liegt (s. Abbildung 2).
Die Flüssigkeitsoberfläche ist eine schiefe Ebene, die hier nach rechts beschleunigt wird. Da parallel zur Flüssigkeitsoberfläche keine Kräfte wirken – sonst würde sie sich nicht so ausbilden - , lassen sich alle Überlegungen übernehmen, die wir oben im Fall der Kurvenüberhöhung angestellt haben. Es folgt **tan(β) = a/g**.
Man könnte hier auch wie folgt argumentieren.
Die Gewichtskraft würde für sich genommen zu einem freien Fall führen; sie bleibt deshalb wie oben erörtert bei der Bestimmung der Form der Flüssigkeitsoberfläche außer Betracht. Auf jedes Flüssigkeitsteilchen wirken die Kräfte **N** = **- G** (Gegenkraft zur Gewichtskraft, herrührend letzten Endes vom Gefäßboden) und **F**. Deren Addition ergibt die hier fett gezeichnete Kraft, welche als Resultierende senkrecht auf der Flüssigkeitsoberfläche stehen muss. Wieder ergibt sich $\tan(\beta) = a/g$

Wie würde in einer Raumstation im Orbit das Experiment ausgehen, wenn eine Kraft N = mg senkrecht auf den Boden und im übrigen irgendwohin gerichtet wäre und wenn die Kraft F = ma, die zur Beschleunigung a führt, senkrecht zu N gerichtet wäre? Dann würde der Flüssigkeitsspiegel den Winkel β mit dem Gefäßboden einschließen, und die ganze Anordnung würde senkrecht zum Flüssigkeitsspiegel eine beschleunigte Bewegung ausführen.

In der Lösung, die ich im o.g. Leserbeitrag vorgestellt habe, wird der hydrostatische Druck als entscheidende Größe ins Spiel gebracht, und man kommt zu dem gleichen Resultat. Das mag auf den ersten Augenblick verwirrend sein, ist doch der hydrostatische Druck als Gewichtsdruck bekannt und wurde doch eben ausgeführt, dass das Gewicht bei der Bestimmung der Form der sich ausbildenden Oberfläche außer Betracht bleibt.
Aber das ist nur ein scheinbarer Widerspruch, der sich wie folgt auflöst. Der hydrostatische Druck ist genau genommen keine Folge der Gewichtskraft - im freien Fall, der sich einstellte, wenn die Gewichtskraft alleine wirkte, gibt es keinen hydrostatischen Druck – ,sondern er ist eine Folge der betragsmäßig gleichen, nach oben gerichteten Normalkraft. Diese schiebt Gefäß und Flüssigkeit gegen die Gewichtskraft senkrecht nach oben, sodass im Resultat keine vertikale Bewegung stattfindet. Ein Flüssigkeitselement in der Tiefe h schiebt vor sich her die über ihm liegende Flüssigkeitssäule. Die Gegenkraft , die es erfährt, ist genau gleich derem Gewicht.
(Bei der Herleitung des hydrostatischen Drucks wird man freilich diese Überlegung zu Recht als eine unnötige Verrenkung ansehen, und wie üblich ihn als eine Konsequenz des Gewichts und der Inkompressibilität der Flüssigkeit herleiten).

Wie groß wäre der hydrostatische Druck in einem Gefäß, das reibungsfrei eine schiefe Ebene (Neigungswinkel α) hinabgleitet? Er wäre gegeben durch $p = \rho g\cos(\alpha)\cdot h$ (ρ : Dichte der Flüssigkeit, h: Abstand des betrachteten Flüssigkeitselementes von der Oberfläche).

Wie müsste man in diesem Fall eine Wasserwaage halten, damit deren Libelle „waagerecht“ anzeigt: Parallel zum Flüssigkeitsspiegel, und das wäre in diesem Fall parallel zur Ebene. Wie wäre es mit dem Auftrieb, wie würde ein Korken aufschwimmen? Wie im „Ruhefall“ : senkrecht zum Flüssigkeitsspiegel. Wie würde Flüssigkeit durch ein Loch im Boden auslaufen? Senkrecht zum Boden und damit senkrecht zur schiefen Ebene.

Wenn zwischen schiefer Ebene und Gefäß Gleitreibung vorläge? Dann erhielte man $p = \rho \bullet (g^2 \bullet \cos^2\alpha + \mu^2 g^2 \bullet \cos^2\alpha)^{1/2} \bullet h = \rho \bullet g \bullet \cos(\alpha)\ (1 + \mu^2)^{1/2} \bullet h$, was im Fall $\mu = \tan(\alpha)$ – das ist der Fall, dass ein Gleiten gar nicht erst einsetzt – in $p = \rho \bullet g \bullet h$ übergeht, wie es ja sein muss.
Die Wasserwaage müsste parallel zum Flüssigkeitsspiegel, und damit mit dem Neigungswinkel β (s.o.) gegen die Waagerechte gehalten werden, das Ausfließen aus dem Boden geschähe senkrecht zum Flüssigkeitsspiegel und damit nicht senkrecht zur schiefen Ebene , sondern gegenüber dieser Senkrechten um den Winkel $\beta' = \arctan(\mu)$ geneigt...