Ein eigenartiger Bremsvorgang

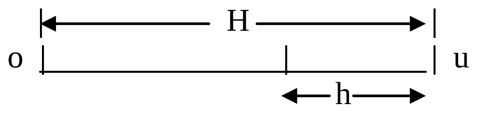
Im Buchhandel findet sich so manches Werk, in dem alltägliche Vorgänge mit Hilfe von Gesetzen der Physik erklärt werden. Als ein Klassiker in diesem Genre kann ein Buch von Jakob Issidorowitsch Perelman gelten, das 1913 in den Buchhandlungen erschien: „Unterhaltsame Physik". J.I. Perelman hat als Ziel seines Buches angegeben: „...den Leser zu befähigen, ...vielfältige Assoziationen zwischen den physikalischen Kenntnissen und den verschiedenartigsten Erscheinungen des Lebens, mit allem, womit er normalerweise in Berührung kommt, herbeizuführen." J.I. Perelman hat in St. Petersburg studiert und gelebt; von Berufs wegen hat er sich mit Forstwirtschaft beschäftigt. Ob der weltberühmte Mathematiker Perelman, der zur Zeit ebenfalls in St. Petersburg lebt und dem vor einigen Jahren der Beweis der Poincaréschen Vermutung gelungen ist, mit J.I. Perelman verwandt ist, weiß ich nicht. Im Jahr 1985 ist im Frankfurter Verlag Harri Deutsch eine Übersetzung der „Unterhaltsamen Physik" erschienen; daraus (S. 207) ist das folgende Problem entnommen.

Perelman befasst sich mit einigen Problemen, die mit dem Auslaufen von Flüssigkeiten aus einem Gefäß zusammenhängen. Aus einem zylindrischen Gefäß, einem Samowar, läuft Tee aus, wenn man einen Hahn an seiner tiefsten Stelle öffnet. Füllt man während des Auslaufens nicht nach, wird die Auslaufgeschwindigkeit v immer kleiner; diese hängt – Perelman gibt diese Formel an – wie folgt von der Höhe h des Flüssigkeitsspiegel ab : $v^2 = 2gh$, wobei g die Erdbeschleunigung bezeichnet. So fällt z. B. die Auslaufgeschwindigkeit, wenn h auf ein Viertel der ursprünglichen Höhe gesunken ist, gemäß $v = (2gh)^{0,5}$ auf die Hälfte des ursprünglichen Wertes ab. Hält man durch ständiges Nachgießen den Flüssigkeitsspiegel auf der anfänglichen Höhe, so fließt der Tee schneller aus. Perelman schreibt dazu: „...mit den Mitteln der höheren Mathematik ...kann man zeigen, daß die Zeit, die zur völligen Entleerung eines Gefäßes nötig ist, doppelt so groß ist wie die Zeit, in der das gleiche Flüssigkeitsvolumen unter unverändertem, anfänglichem Wasserspiegel ausfließt."

Ja, wir wollen das zeigen, aber auf „Mittel der höheren Mathematik" muss man nicht zurückgreifen, wenn man Kenntnisse aus der Schulphysik heranzieht, die in Klassenstufe 10 (vor Einführung von G 8 in der Klassenstufe 11) bei der Behandlung der Kinematik grundlegend sind.

Ich beschreibe kurz den Weg. Zuerst wird gezeigt, dass das Absinken des Flüssigkeitsspiegels beim Auslaufen wie ein Bremsvorgang mit konstanter Bremsbeschleunigung beschrieben werden kann. Das Weg-Zeit-Gesetz der Momentangeschwindigkeit einer solchen Bewegung liefert dann eine Gleichung, mit deren Hilfe die gesuchte Auslaufzeit bestimmt werden kann.

Als erstes sei an die grundlegenden Kenntnisse zum Bremsen mit konstanter Bremsbeschleunigung erinnert; wie üblich wird mit a der **Betrag** dieser Beschleunigung bezeichnet. Die Bedeutung der in der Skizze verwendeten Buchstaben o und u wird etwas später erklärt werden.



Der zu bremsende Körper bewege sich von links nach rechts (von o nach u); er hat bei o die Geschwindigkeit v_0; dann setzt das Bremsen ein. Die Bremsbewegung ist charakterisiert durch die Formel $v^2 = 2ah$, wobei v die Momentangeschwindigkeit an einer Stelle des

Bremsweges und h der von da an noch zurückzulegende Bremsweg bedeuten; insbesondere gilt $v_0^2 = 2aH$.

Was hat das mit unserem Problem zu tun ? Betrachten wir den sinkenden Flüssigkeitsspiegel; H ist die anfängliche Füllhöhe, h eine Füllhöhe während des Auslaufens; der Spiegel bewegt sich von oben (o) nach unten (u). Bezeichnen A' , A die Querschnittsflächen von Samowar (Zylindergefäß) und auslaufendem Strahl, v', v die Geschwindigkeiten des Absinkens des Flüssigkeitsspiegels und des auslaufenden Strahls, so läuft im Zeitintervall dt das Volumen dV aus, wobei gilt: $dV = A' \bullet (v' \bullet dt) = A \bullet (v \bullet dt)$; es gilt also $\mathbf{v' = (A/A') \bullet v}$
Natürlich ist A/A' eine sehr kleine Zahl, aber die Absinkgeschwindigkeit des Flüssigkeitsspiegels ist proportional zur Auslaufgeschwindigkeit des Strahls.
Da die Auslaufgeschwindigkeit v bei der Füllhöhe h gegeben ist durch $v^2 = 2gh$, folgt
$\mathbf{(v')^2} = (A/A')^2 \bullet 2gh \mathbf{= 2ah}$ mit $\mathbf{a = (A/A')^2 \bullet g}$

Somit gehorcht das Absinken des Flüssigkeitsspiegels dem Formalismus, dem man vom Bremsvorgang her kennt, und so folgt, wenn t wie üblich die Zeit bezeichnet, für das Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz des Absinkens:

$$\mathbf{v'(t)} = v_0' - a \bullet t = \mathbf{(2aH)^{0,5} - (A/A')^2 \bullet t}$$

Die Auslaufdauer T ergibt sich aus dem Ansatz $v'(T) = 0$, woraus folgt:

$$\mathbf{T} = v_0'/a = \mathbf{2 \bullet (A/A') \bullet (H/2g)^{0,5}}$$

Bei konstanter Auslaufgeschwindigkeit $v' = (A/A') \bullet v_0$ würde das Auslaufen beendet sein, wenn $v' \bullet T = H \Rightarrow \mathbf{T} = H/v' = \mathbf{(A/A') \bullet (H/2g)^{0,5}}$ **.** Das ist in der Tat nur halb so groß wie im Fall des Auslaufens bei sinkendem Flüssigkeitsspiegel.

Stellen wir noch das Weg-Zeit-Gesetzt für den Flüssigkeitsspiegel h auf.

$$s(t) = H - h(t) = -\tfrac{1}{2} at^2 + v_0 t \Rightarrow \mathbf{h(t)} = H + \tfrac{1}{2} at^2 - v_0 t = \mathbf{H - (A/A')(2gH)^{0,5} t + \tfrac{1}{2}(A/A')^2 gt^2}$$

Wer noch etwas weiter rechnen möchte, kann gerne die Probe durchführen: $h(0) = H$ und $h(T)=0$