Ein paar Berechnungen zur Entropie

Der Begriff der Entropie kommt im Schulunterricht kaum vor. Es gibt aber einige Gelegenheiten, wo man ihn gewissermaßen en passant aufnehmen kann. Von einer solchen Gelegenheit wird hier berichtet.

Im Verlauf des Unterrichts zur Wahrscheinlichkeitsrechnung kommt irgendwann das Beispiel mit den Lottozahlen „6 aus 49“ zur Sprache.
Schaut man sich die Ziehung der Lottozahlen im Fernsehen an, so ist zu sehen, wie die sechs Zahlen **der Reihe nach** gezogen werden und so auch aufgestellt werden. Das ist ein Beispiel für eine „6-Permutation aus einer 49-Menge“. Deren Anzahl ist $49 \cdot 48 \cdot .... \cdot 44 = 1{,}007 \cdot 10^{10}$, das ist die Mächtigkeit der Ergebnismenge des Experiments „Ziehung der Lottozahlen“,und der Kehrwert davon gibt die Wahrscheinlichkeit eines solchen Ergebnisses (eines „Elementarereignisses“) und damit die Gewinnchance an für den Fall, dass es beim Spiel auf die Reihenfolge ankäme.

Aber von der Reihenfolge wird abgesehen, schließlich kann man einem Lottoschein nicht ansehen, in welcher Reihenfolge die Zahlen darauf angekreuzt worden sind.
Also lässt man die Information über die Reihenfolge fallen. Auf dem Lottoschein ist dargestellt eine 6-Teilmenge einer 49-Menge, kurz eine Teilmenge „6 aus 49“. In jeder dieser Teilmengen sind 6! Ergebnisse des Experiments „Ziehung der Lottozahlen“ enthalten. Es gibt $49 \cdot 48 \cdot .... \cdot 44 / 6! = 13\,983\,816$ solcher Teilmengen. Der Kehrwert dieser Zahl, die Wahrscheinlichkeit eines der Ereignisse „6 aus 49“, zugleich die Gewinnchance des entsprechenden Lottoscheins, ist $7{,}15 \cdot 10^{-8}$. Diese ist um den Faktor 6! größer als die Gewinnchance $9{,}93 \cdot 10^{-11}$, die man hätte, wenn die Reihenfolge der Ziehung beachtet werden würde.
Der Logarithmus der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses wird als dessen „Entropie“ bezeichnet. Meist wählt man den natürlichen Logarithmus – ein Basiswechsel würde nur zu einem konstanten Faktor führen. Und so ist die Entropie eines Ereignisses mit der Wahrscheinlichkeit p gegeben durch
$S = C \cdot \ln(p)$, wobei der konstante Faktor C dem jeweiligen Problem angepasst ist (in der Physik wählt man gewöhnlich die Boltzmann-Konstante). In unserem Beitrag wählen wir $C = 1$.

Schon das hier genannte Beispiel zeigt ein Merkmal der Entropie. Bei der Ziehung der Lottozahlen ist die Entropie jeden Elementarereignisses (jeder Ziehung) gleich $\ln(9{,}93 \cdot 10^{-11}) = - 23{,}03$,. Beachtet man die Reihenfolge nicht, verzichtet man also auf einen Teil der im Prinzip möglichen Informationen, so erhöht sich die Entropie um ln(6!) von – 23.03 auf – 16,45 : Die Entropieerhöhung ist ein Maß für den Informationsverlust.

Wir betrachten folgendes Experiment. Drei voneinander unterscheidbare Würfel, sagen wir ein roter, ein schwarzer und ein weißer, werden geworfen, und die Augenzahlen werden registriert. Die drei Augenzahlen x,y,z bilden ein 3-Tupel der 6-elementigen Menge der Zahlen von 1 bis 6; es gibt $6^3 = 216$ solcher 3-Tupel.

Wir werfen nun die drei Würfel und notieren die Summe n der drei Augenzahlen.
Damit verzichten wir auf Informationen, welche der Vorgang im Prinzip hergeben könnte, die Reihenfolge der Augenzahlen. Das Ereignis „Summe der Augenzahlen ist gleich n“ ist eine Teilmenge der 216-elementigen Ergebnismenge . Jede dieser Teilmengen enthält genau die 3-Tupel $(x|y|z)$, für die gilt $x + y + z = n$. Es gibt 16 solcher Teilmengen, denn n ist eine Zahl zwischen 3 und 18.
Mit H(n) bezeichnen wir die Zahl der 3-Tupel, welche die Augenzahlsumme n hat, also die Mächtigkeit des Ereignisses „Summe der Augenzahlen ist gleich n“. Der Quotient $h(n) = H(n)/216$ gibt die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses an.

Zur Berechnung von H(n)

Es genügt, die Berechnung für n = 3,4,...,10 zu betrachten. Denn zu jedem Wurf (x|y|z) gehört genau ein Wurf ((7-x|7-y|7-z), d.i. der Wurf mit den Augen der gegenüberliegenden Würfelseiten.
Ist n = x+y+z, so ist (7-x)+(7-y)+(7-z) = 21 – n. Damit ist **H(n) = H(21-n).**

Das gilt auch dann, wenn man einen ungewöhnlichen Würfel benutzen würde, bei dem sich die Augenzahlen gegenüberliegender Seiten nicht zu 7 ergänzten. Seien x',y',z' die Augenzahlen auf den Seiten des Würfels, welche den Seiten mit den Augenzahlen x,y,z gegenüberliegen. Ist n = x+y+z, so ist x'+y'+z' = (x'+x – x) + (y'+y-y)+(z'+z-z) = (x'+x+y'+y+z'+z) – (x+y+z) = 21 – n, denn der erste Summand ist gerade die Summe der Augenzahlen der sechs Seiten des Würfels.

Man kann H(n) wie folgt bestimmen.
Sei z.B. n = 7. Die erste Augenzahl x kann gleich 5,4,3,2,1 sein. Im Fall x = 5 muss y= 1 und z= 1 sein, im Fall x= 4 kann y= 1 oder y= 2 sein u.s.w. So zählt man alle möglichen Tripel (x|y|z) ab.

Das Ergebnis in Tabellenform:

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
H(n)	1	3	6	10	15	21	25	27	27	25	21	15	10	6	3	1
[(H(n))/216]·100	0,46	1,39	2,78	4,63	6,95	9,72	11,57	12,5	12,5	11,57	9,72	6,95	4,63	2,78	1,39	0,46

Wie es sein muss, ist die Summe aller H(n) gleich 216 .
Die dritte Zeile ist die mit 100 multiplizierte Wahrscheinlichkeit h(n). Die Multiplikation hat nur zum Ziel, die Zahlen angenehmer zu gestalten.

Der Logarithmus der Wahrscheinlichkeit h(n) ist bis auf einen konstanten Faktor, den wir o.B.d.A. gleich 1 setzen können, gleich der Entropie S(n) des Ereignisses „Summe der Augenzahlen ist gleich n".

Wir tabellieren ln(H(n)) = ln[h(n)] + ln(216) = S(n) + 5,38.

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
S(n)+5,38	0	0,05	1,02	2,30	2,71	3,04	3,22	3,30	3,30	3,22	3,04	2,71	2,30	1,02	0,05	0

Das zugrunde liegende Experiment war das Würfeln mit drei unterscheidbaren Würfeln. Schreibt man als Ergebnis eines solchen Experiments die drei Augenzahlen der drei Würfeln der Reihe nach auf, so sind die Ergebnisse 3-Tupel der Zahlen 1 bis 6; die Ergebnismenge ist die aus 6^3 = 216 Elementen bestehende Menge dieser 3-Tupel. Alle diese Elementarereignisse haben die gleiche Wahrscheinlichkeit 1/216, und alle diese Elementarereignisse haben damit die gleiche Entropie ln(1/216) = - 5,38.
Interessiert man sich nicht für die Reihenfolge der Zahlen, sondern nur für die Summe n der Augenzahlen, so verzichtet man auf einen Teil der Informationen, welche das System hergeben könnte.
Man betrachtet dann die 16 Teilmengen der Ergebnismenge, welche die Ereignisse „Summe der Augenzahlen ist gleich n" repräsentieren. Und diese Ereignisse unterscheiden sich in ihrer Wahrscheinlichkeit. Im vorliegenden Fall gibt es ein Maximum bei n = 10 und n=11. Damit unterscheiden sich die Ereignisse in ihrer Entropie. Diese ist um so größer, je mehr Informationen man durch die Beschränkung der Kenntnisnahme auf die bloße Summe der Augenzahlen verliert.
So ist z.B. S(10) = - 2,08 > S(8) = -2,34 : Die Augenzahlsumme 8 zeigt sich bei 21 verschiedenen Würfen, die Augenzahlsumme 10 bei 27 Würfen.

Je mächtiger die Ereignismenge gewählt wird, um so größer ist der Informationsverlust, den man in Kauf nimmt. So enthält z.B. die Menge des Ereignisses „n ist 8 oder 10“ 48 Elemente, die Wahrscheinlichkeit h(8 v 10)) = 48/216 = 0,22 und S(8v10) = ln(0,22) = - 1,50 . Die größte Ereignismenge ist natürlich die Ergebnismenge selbst (n ist irgendeine Zahl zwischen 3 und 18). Deren Mächtigkeit ist 216, die Wahrscheinlichkeit gleich 1 und die Entropie gleich 0. Das ist der Maximalwert der Entropie, und er kennzeichnet den totalen Informationsverlust: Wenn drei Würfel geworfen werden, dann enthält die Aussage „ Augenzahl zwischen 3 und 18“ keine Information.