Einiges zur Wurzelfunktion

Oder: Diffusion und Fehlerrechnung als Ergebnis einer zufälligen Wanderung

Welches Experiment ist gemeint, wenn man von „zufälliger Wanderung“ in x-Richtung oder von einer „eindimensionalen zufälligen Wanderung“ spricht?

Eine kleine Masse startet im Nullpunkt. Sie führt zufällig einen Sprung der Weite 1 in +x-Richtung oder in –x –Richtung aus; landet nach einem solchen Sprung also bei x=1 oder bei x= - 1. Das ist der Elementarversuch, welcher der zufälligen Wanderung zugrunde liegt.

Die Eigenschaften dieses „Elementarversuches“ lassen sich leicht angeben.
Was ist sein Mittelwert?
Dazu denkt man sich den Versuch n mal in gleicher Weise wiederholt. Nach dem ersten Durchlauf sitzt die Masse bei + 1 oder bei –1. Man notiert das Ergebnis x_1. Dann setzt man sie wieder auf Null zurück, führt den Versuch erneut aus, notiert das Ergebnis x_2. Wird dieser Versuch unzählige Male durchgeführt (genauer: n – mal mit n>>1), so ergibt sich der Mittelwert

$$\underline{x} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)/n = 0$$

Man nimmt als wahren (wahrscheinlichsten) Wert also das arithmetische Mittel an.
Diese Annahme wird in allen Versuchen gemacht, bei denen die möglichen Messwerte alle gleichwahrscheinlich sind. Implizit vorausgesetzt wird auch, dass der Versuch beliebig oft wiederholbar ist und dass die Messergebnisse sich nicht gegenseitig beeinflussen. Die im folgenden angebebenen Definitionen und Beziehungen gelten ebenfalls unter diesen Voraussetzungen.

Die Streuung (Standardabweichung) σ errechnet sich nach folgender Formel

$$\sigma^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - \underline{x})^2\right)/n$$

Im hier beschriebenen „Elementarversuch“ hat σ den Wert 1.

Auch das Mittel des Quadrates der Messwerte $\underline{x^2} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)/n$

hat in unserem Elementarversuch den Wert 1.

Worin besteht jetzt die zufällige Wanderung der Länge z (die zufällige Wanderung aus z Schritten) ?
Die Masse startet im Ursprung und führt den beschriebenen Elementarversuch aus. Danach liegt sie bei $x_1 = +1$ oder $x_1 = -1$. <u>Sie wird nun aber nicht mehr zurückgesetzt, sondern führt den nächsten Elementarversuch (Sprung um +1 oder um –1) von der neuen Ausgangslage her durch.</u> Nach z Schritten wird sie irgendwo zwischen –z und +z auf der x-Achse liegen.
Das Ergebnis der zufälligen Wanderung ist die Summe aus z Summanden
$x_1 + x_2 + ...+ x_z$, wobei alle Summanden den Wert 1 oder – 1 haben.

Nennen wir das Ergebnis dieser Summe X (im Unterschied zu x). Das arithmetische Mittel $\underline{X}$ ist vergleichsweise einfach zu bestimmen. Führt man die zufällige Wanderung n-mal aus (n>>1), so ergibt sich $\underline{X} = n \cdot \underline{x}$ (Rechnung im Anhang). Weil hier $\underline{x} = 0$, gilt hier auch $\underline{X} = 0$.

Die Berechnung der Streuung gestaltet sich im Fall der zufälligen Wanderung etwas hakelig. Diese Berechnung steht im Anhang.

Das Ergebnis: $\boldsymbol{\sigma^2 = z \quad \leftrightarrow \quad \sigma = (z)^{1/2}}$ (Wir schreiben hier und im folgenden statt des Quadratwurzelzeichens die Potenz mit der Hochzahl ½).

Was bedeutet dieses Ergebnis? Angenommen, eine Masse führt eine zufällige Wanderung mit z Schritten aus. Wo wird sie an deren Ende zu finden sein? Der Erwartungswert für ihren Ort ist der Mittelwert $\underline{x} = 0$. Aber dort wird man sie meist nicht antreffen, sondern die Orte werden um den Ursprung streuen; man wird sie „bis auf Ausreißer" in einem Intervall $[-\sigma ;\sigma]$ um den Ursprung finden. Führt man eine zufällige Wanderung aus z Schritten durch, so wird man erwarten, dass die Masse am Ende in diesem Intervall landet.
Nach einer zufälligen Wanderung aus z Schritten der Länge 1 beträgt die mittlere Entfernung vom Ursprung $(z)^{1/2}$.

Und dieses Ergebnis ist übertragbar auf den folgenden, praktisch sehr wichtigen Fall.

Angenommen, eine physikalische Größe A (z.B. der Inhalt einer unregelmäßig geformten Fläche, der durch Auszählen von „Einheitsquadraten" bestimmt werden muss) wird z-mal nacheinander gemessen. Der Fehler vom Betrag ΔA, der dabei gemacht wird, sei jedes Mal in etwa gleich groß (man weiß natürlich nicht, in welcher Richtung der Fehler gemacht wird). Addiert man alle z Messwerte, so erhält man z-mal den „wahren" Wert plus das Ergebnis der zufälligen Wanderung aus z Schritten mit der Schrittlänge ΔA. Der „wahre" Wert $\underline{A}$ ist das arithmetische Mittel aus sehr vielen Einzelmessungen. Das Ergebnis der Addition erwartet man daher im Intervall $z \cdot \underline{A} \pm (z)^{1/2} \cdot \Delta A$.

Dividiert man durch z, so erhält man als Mittel aus den z Messungen $\boldsymbol{\underline{A} \pm \Delta A / (z)^{1/2}}$
Die z-malige Wiederholung einer Messung verringert den Messfehler um den Faktor $(z)^{1/2}$.

Am Beispiel der Diffusion lassen sich einige Eigenschaften der Wurzelfunktion anwenden.

Breitet sich ein Gas oder eine Flüssigkeit durch Diffusion aus, so ist die in der Zeit t zurückgelegte Strecke proportional zu $(t)^{1/2}$. Die Diffusionsgeschwindigkeit ist als Ableitung des Weges nach der Zeit proportional zu $1/(t)^{1/2}$. Hier sind die Fälle t gegen O und t gegen unendlich interessant! Im ersten Fall wächst die Geschwindigkeit über alle Grenzen (tatsächlich hat sie in der thermischen Geschwindigkeit der Moleküle bzw. Atome ihre natürliche Grenze), im zweiten Fall geht sie gegen Null. In der Tat liest man in den Biologiebüchern nach, dass die Diffusion über sehr kurze Strecken (durch Membranen wie etwa Zellwände oder durch die dünnen Wände der Lungenbläschen) der schnellste Transportprozess ist. Geht es um große Strecken, erfolgt die Diffusion sehr langsam, wie ja z.B. die häufig im Chemieunterricht gezeigte Diffusion von Bromgas zeigt.
Ein weiterer Vorteil der Diffusion, so die Biologiebücher, ist die Tatsache, dass sie spontan, allein aufgrund von Konzentrationsunterschieden erfolgt; man spricht von passivem Transport im Gegensatz von aktivem Transport. Und sie geht auf Kosten der thermischen Energie der Brownschen Molekularbewegung; Stoffwechselenergie muss nicht eigens bereit gestellt werden. Die Energie wird gewissermaßen aus dem „Wärmeabfall" des

Stoffwechselgeschehens entnommen. Es müssen nur die Konzentrationsunterschiede aufrecht erhalten werden.
Interessant ist, dass die Wurzel-t- Abhängigkeit sich aus makroskopischen Beobachtungen ergibt, dass aber das Modell der zufälligen Wanderung zur gleichen Abhängigkeit führt (die Schritte als in gleichen Zeitintervallen erfolgend gedacht): Das makroskopisch ermittelte Diffusionsgesetz lässt sich interpretieren als das Resultat einer zufälligen Wanderung.

Bildet sich eine Eisdecke, so ist die Dicke der Eisdecke proportional zur Wurzel aus der Zeit (gleicher Temperaturunterschied zwischen Luft und Wasser während der Beobachtungszeit vorausgesetzt). Wiederum ist die Geschwindigkeit des Fortschreitens der Dicke, die Bildungsrate, umgekehrt proportional zur Wurzel aus der Zeit. Das erklärt, dass die Eisbildung zu Beginn recht schnell erfolgt, dann aber immer langsamer vorangeht – ein bekanntes und bei den Rettungsdiensten gefürchtetes Phänomen. Auch die Eisbildung kann als zufällige Wanderung aufgefasst werden (in diesem Fall der Stöße der Moleküle, welche die Wärmeenergie auf diese Weise übertragen).

Anhang

Eine beliebig oft wiederholbare Messung, deren Einzelmessungen sich nicht gegenseitig beeinflussen und die alle gleich wahrscheinlich sind, wird n-mal durchgeführt (n>>1). Der Mittelwert der Ergebnisse ist dann gegeben durch das arithmetische Mittel aller Ergebnisse:

$$\underline{x} = \left(\sum^{n} x_i\right)/n$$

Die Streuung σ ist bei solchen Experimenten gegeben durch die Quadratwurzel aus dem arithmetischen Mittel der Abweichungsquadrate der Messwerte vom Mittel:

$$\sigma^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - \underline{x})^2\right)/n$$

Übrigens ist, wie eine kurze Rechung zeigt (s. z.B. Gerthsen Physik,18.Auflage, S.7) $\sigma^2 = \underline{x^2} - (\underline{x})^2$, wobei $\underline{x^2} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)/n$.

Kommen wir nun zur zufälligen Wanderung aus z Schritten zurück. Jetzt verläuft das Experiment wie folgt.
Die Masse sitzt bei Null. Das Elementarexperiment wird durchgeführt; danach liegt die Masse bei x=+1 oder bei x= - 1. <u>Sie wird jetzt aber nicht mehr zurückgesetzt, sondern das Elementarexperiment startet von dem Punkt aus, auf dem sie gelandet ist.</u> Und das wird z-mal nacheinander so gemacht. Danach liegt die Masse irgendwo zwischen + z und – z auf der x-Achse. Wir nennen den so erreichten Endwert X (im Unterschied zu dem x, das nur die Werte +1 oder – 1 annehmen kann).
Der Mittelung von X und X^2 liegt folgendes Gedankenexperiment zugrunde. Man führt die zufällige Wanderung aus z Schritten durch, notiert das Ergebnis $x_1 + x_2 + ...+x_z$ bzw. $(x_1 + x_2 + ...+x_z)^2$. Das macht man ungeheuer oft . Und aus all den Ergebnissen bildet man das arithmetische Mittel

$$\underline{X} = \left[\sum_{i=1}^{n} (x_1 + x_2 + ...+x_z)_i\right]/n = \left[\sum_{i=1}^{n} (x_1)_i + (x_2)_i + ...+(x_z)_i\right]/n = z\cdot\underline{x}$$

Zur Erläuterung: $(x_1)_i$ bedeutet die erste von z –Messungen beim i-ten (von n) Durchgängen. Da x_1, x_2, ...x_z voneinander unabhängig sind, ergibt sich $z \cdot \underline{x}$. In unserem Fall ist $\underline{X} = 0$

Ein wenig umständlicher gestaltet sich die Berechnung von $\underline{X^2}$ Wieder ist n ungeheuer groß.

$$\underline{X^2} = [\sum_{i=1}^{n} (x_1 + x_2 + ...+x_z)^2_i\ ]/n = [\sum_{i=1}^{n} (x_1)_i^2 + (x_2)_i^2 + ...+(x_z)_i^2 + \text{“}(x_r x_s)_i\text{“}\ ]/n$$

Die etwas eigenwillige Bezeichnung “$(x_r x_s)_i$“ hat folgende Bedeutung. i ist wieder der Index welcher den i-ten von n Durchgängen angibt. Die Indizes r und s liegen zwischen 1 und z, und die Anführungszeichen bedeuten, dass es sich um die $z^2 - z$ gemischten Produkte aus den x_1 bis x_z handelt. In unserem Fall sind die x_r, x_s unabhängig voneinander und zufällig gleich +1 oder gleich –1, entsprechend ist ihr Produkt zufällig gleich +1 oder gleich –1, und bei ungeheuer vielen Durchgängen heben sich alle diese Produkte gegenseitig auf.

Somit haben wir in unserem Fall der zufälligen Wanderung aus z Schritten:

$\underline{X^2} = z \cdot \underline{x^2} = z$. Das bedeutet für die Streuung σ der Größe X :

$\sigma^2 = \underline{X^2} - (\underline{X})^2 = \underline{X^2} = z$ und damit $\boldsymbol{\sigma = (z)^{1/2}}$

Nach einer zufälligen Wanderung aus z Schritten der Länge 1 beträgt die mittlere Entfernung vom Ursprung $(z)^{1/2}$.

Erörtern wir noch den allgemeinen Fall ($\underline{x}$ ungleich 0) !

Dann geht die Summe über in : $\underline{X^2} = z \cdot \underline{x^2} + (z^2 - z) \cdot (\underline{x})^2$, und damit gilt

$\underline{X^2} - (\underline{X})^2 = \underline{X^2} - z^2(\underline{x})^2 = z \cdot (\underline{x^2} - (\underline{x})^2)$ oder $\boldsymbol{(\underline{X^2} - (\underline{X})^2)^{1/2} = (z)^{1/2} \cdot (\underline{x^2} - (\underline{x})^2)^{1/2}}$

In Worten: Ist σ die Streuung des Wertes einer Einzelmessung, so ist die Streuung bei einer Summe aus z Messwerten das $(z)^{1/2}$-fache von σ.