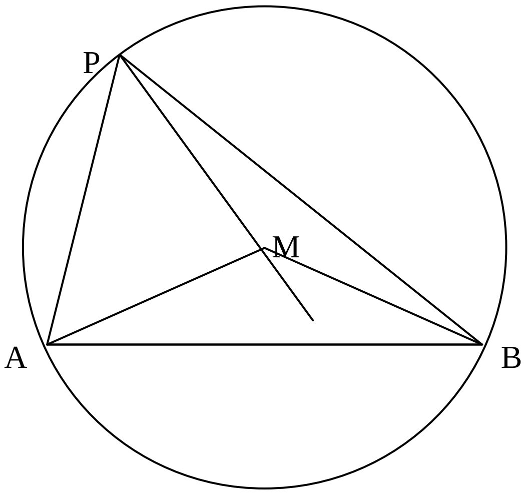
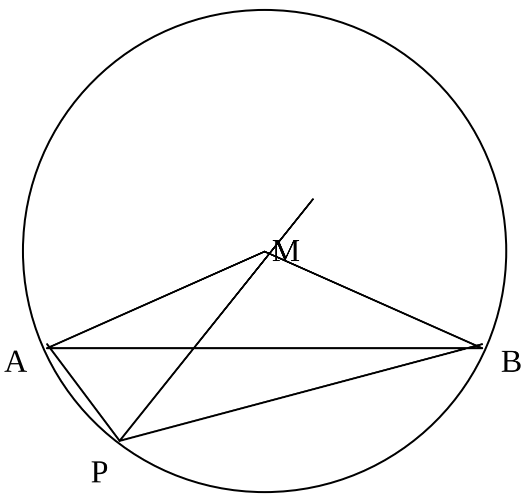
Lösung

Zu 1)

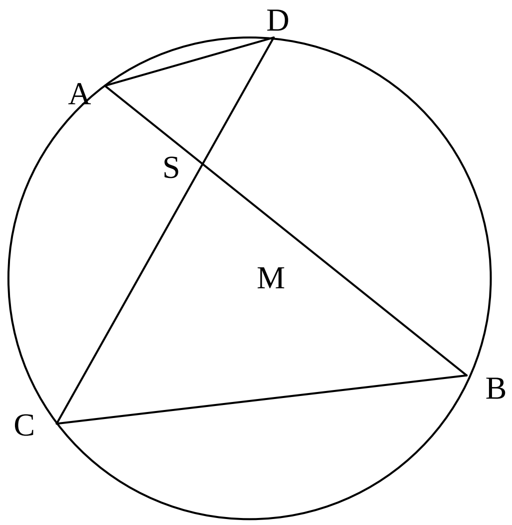


Der Mittelpunktswinkel wird durch die Gerade durch die Punkte P und M in zwei Winkel zerlegt, welche jeweils Außenwinkel zu den beiden gleichschenkligen Dreiecken AMP und MBP sind. Jeder dieser Außenwinkel ist gleich der Summe der beiden Basiswinkel in diesen gleichschenkligen Dreiecken. Der Peripheriewinkel ist gleich der Summe aus je einem der Basiswinkel, und er ist deswegen halb so groß wie der Mittelpunktswinkel. Die genaue Lage von P spielt keine Rolle.

Liegt der Punkt P unterhalb der Sehne AB, so ist der zugehörige Mittelpunktswinkel derjenige, der den soeben betrachteten Mittelpunktswinkel zu 360° ergänzt. Der Beweis folgt genau den gleichen Schritten wie im eben behandelten Fall.

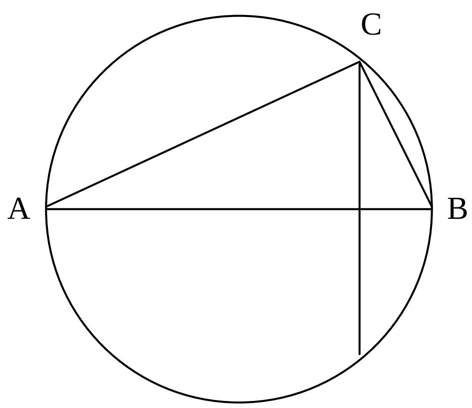


Zu 2)



Wir zeigen, dass die Dreiecke ASD und SCB ähnlich sind. Die Winkel BSC und ASD sind als Scheitelwinkel einander gleich. Die Winkel DAS und SCB sind als Peripheriewinkel über der Sehne DB einander gleich. Die beiden Dreiecke stimmen also in allen Winkeln überein.
Damit gilt: $|AS|: |SD| = |CS| : |SB|$ oder $|AS| \bullet |SB| = |CS| \bullet SD|$

Zu 3a)



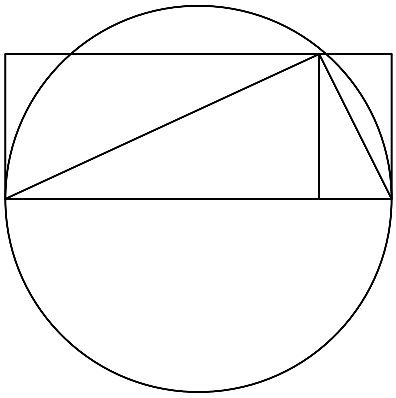
Die Höhe h wird zu einer Sehne verdoppelt; diese zerlegt die Seite c in die Abschnitte p und q. Aus dem Sehnensatz folgt

$h^2 = p \bullet q$

Der Radius des Thaleskreises ist gleich c/2; $h \leq c/2$, und das Gleichheitszeichen gilt, wenn $p=q=c/2$ ist.

Also gilt: $h^2 = p \bullet q \leq (c/2)^2 = ((p+q)/2)^2$ oder $(p \bullet q)^{0,5} \leq (p+q)/2$: Das geometrische Mittel ist kleiner oder gleich dem arithmetischen; Gleichheit gilt bei p=q

Zu 3b)



Der Inhalt des Rechtecks ist doppelt so groß wie der des rechwinkligen Dreiecks:
$c \bullet h = a \bullet b$
($a \bullet b$ ist der doppelte Inhalt des Dreiecks)

Zu 3c)

Wir greifen auf den Teil b) zurück: $c \bullet h = a \bullet b$ und damit $c^2 \bullet h^2 = a^2 \bullet b^2$.

Es folgt: $1/h^2 = c^2/(a^2 \bullet b^2) = (a^2 + b^2)/ a^2 \bullet b^2 = 1/b^2 + 1/a^2$ oder $2/2h^2 = 1/a^2 + 1/b^2$, q.e.d.

Zu 3d) Unter b) ist schon gezeigt worden, dass das geometrische Mittel kleiner oder gleich dem arithmetischen ist. Zu zeigen ist noch, dass das harmonische Mittel kleiner oder gleich dem geometrischen ist.

Es gilt $c/2 \geq h$, wobei das Gleichheitszeichen im Fall $p = q = c/2$ steht.

$c/2 \geq h \leftrightarrow c/h \geq 2 \leftrightarrow c/h^2 \geq 2/h \leftrightarrow (p+q)/pq \geq 2/(pq)^{0,5} \leftrightarrow (1/p + 1/q) \geq 2/(pq)^{0,5}$

Nun gilt definitionsgemäß wenn m das harmonische Mittel der Zahlen p und q bezeichnet:

$2/m = 1/p + 1/q$. Wir haben damit gezeigt: $2/m \geq 2/(pq)^{0,5} \leftrightarrow (pq)^{0,5} \geq m$, q.e.d.
Gleichheit gilt, wenn $p = q$